

OLIMPIADA DE MATEMATICA
Etapa locala 13.02.2010
CLASA a VIII a

SUBIECTUL I

Demonstrati ca daca $x, y, z \in (0, \infty)$, atunci

$$\frac{x^2 + xy + y^2}{y + z} + \frac{y^2 + yz + z^2}{z + x} + \frac{z^2 + zx + x^2}{x + y} \geq \frac{3}{2}(x + y + z)$$

Calin Burdusel

SUBIECTUL II

Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$. Demonstrati ca ecuatia $(n+23)^a = (n+5)^b$ are solutii $n \in \mathbb{N}^*$,

daca si numai daca $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$

Calin Burdusel

SUBIECTUL III

a) Demonstrati ca $x^4 - 4x + 3 \geq 0, (\forall) x \in \mathbb{R}$ si ca $x^3 - 3x + 2 \geq 0, (\forall) x \in [-2, \infty)$

b) Folosind eventual a) demonstrati ca daca $a, b, c, d \in [-2, \infty)$, astfel incat

$$a + b + c + d = 5, \text{ atunci } a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq 7 \text{ si } a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 8$$

Calin Burdusel

SUBIECTUL IV

Fie cubul $ABCD A'B'C'D'$ avand muchia a . Consideram punctele

$M \in (BB')$, $N \in (CC')$, $P \in (DD')$. Notam cu R perimetrul pentagonului

$AMNPA'$. Demonstrati ca $R \geq a\sqrt{17} + a$ si precizati pozitiile punctelor M, N, P pentru care se realizeaza egalitatea.

Calin Burdusel

NOTA: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect este cotate cu 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.